Exercice n°1: Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse

1°/ la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$ est paire

$D_f = \mathbb{R}$.

* Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $-x \in \mathbb{R}$

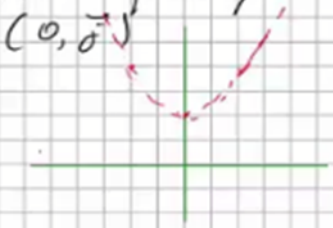
* $f(-x) = (-x)^2 + 1$

$= x^2 + 1$

$= f(x)$

f est une fonction paire

(C_f est symétrique par rapport à $(O, \vec{j})$)

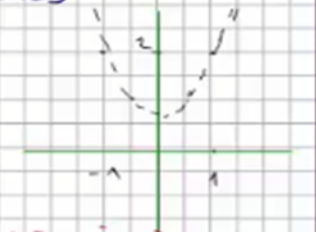


f paire

soit f une fonction définie sur un intervalle I

f est paire si $\begin{cases} \forall x \in D_f ; -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

C_f symétrique par rapport à l'axe des ordonnés



2°/ La fonction g définie sur $[-2, 3]$ par $g(x) = |x|$ est paire

* $x \in [-2, 3] \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$

$\Leftrightarrow 2 \geq -x \geq -3$

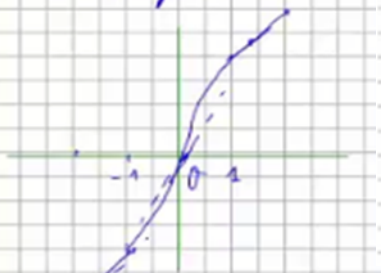
$\Leftrightarrow -x \in [-3, 2]$

g n'est pas une fonction paire.

fonction impaire

f est impaire si $\begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

C_f symétrique par rapport à l'origine O du repère.



3°/ le domaine de définition de la fonction h définie par $h(x) = \frac{\sqrt{2x-4}}{x-3}$ est $[0, +\infty[\setminus \{3\}$

$x \in D_h \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ 2x - 4 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ 2x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \geq 2 \end{cases}$

$D_h = [2, +\infty[- \{3\}$

* $\frac{A}{B}$ existe si $B \neq 0$

* $\sqrt{A}$ existe si $A \geq 0$.

4°/ la fonction u définie par $u(x) = x^2 - 2x + 3$ est croissante sur $[1, +\infty[$

$u(x) = x^2 - 2x + 3$.

u est définie dérivable sur $\mathbb{R}$

$u'(x) = 2x^1 - 2 + 0 = 2x - 2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u		↘		↗	

la fonction u est croissante sur $[1, +\infty[$

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

$(x^n)' = n x^{n-1}$

$(a)' = 0$

Exercice n°1:

I // Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + 3x^2 + 1$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ a) Montrer que I(-1,3) est un centre se symétrie se C puis écrire une équation de la tangente T à C en I

1°/ $a = -1$; $2a - x = -2 - x$

$b = 3$

* $D_f = \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $2a - x = -2 - x \in \mathbb{R}$

* $f(2a-x) + f(x)$

$= f(-2-x) + f(x)$

$= (-2-x)^3 + 3(-2-x)^2 + 1 + x^3 + 3x^2 + 1$

$= -(2+x)^3 + 3(2+x)^2 + 1 + x^3 + 3x^2 + 1$

$= -(8 + 12x + 6x^2 + x^3) + 3(4 + 4x + x^2) + x^3 + 3x^2 + 2$

$= -x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + 3x^2 + 12x + 12 + x^3 + 3x^2 + 2$

$= 6 = 2b$

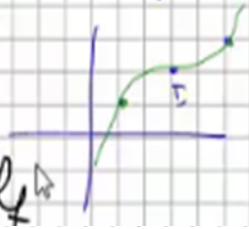
I(-1,3), centre de symetrie de C_f

Centre de symetrie
f une fct definie sur un intervalle I et C sa courbe.

I(a,b) est un centre de symetrie de C

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot \forall x \in I ; 2a - x \in I \\ * f(2a-x) = 2b - fx \end{cases}$

* $f(2a-x) + f(x) = 2b$



c) Branches infinis.

. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors on calcule $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$

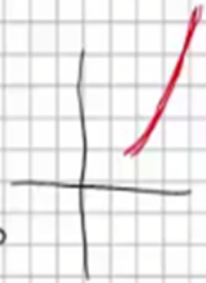
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{+\infty} x^2 = +\infty$

C_f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} \frac{x^3}{x}$

$= \lim_{-\infty} x^2 = +\infty$

C_f admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direct $(O, \vec{j})$



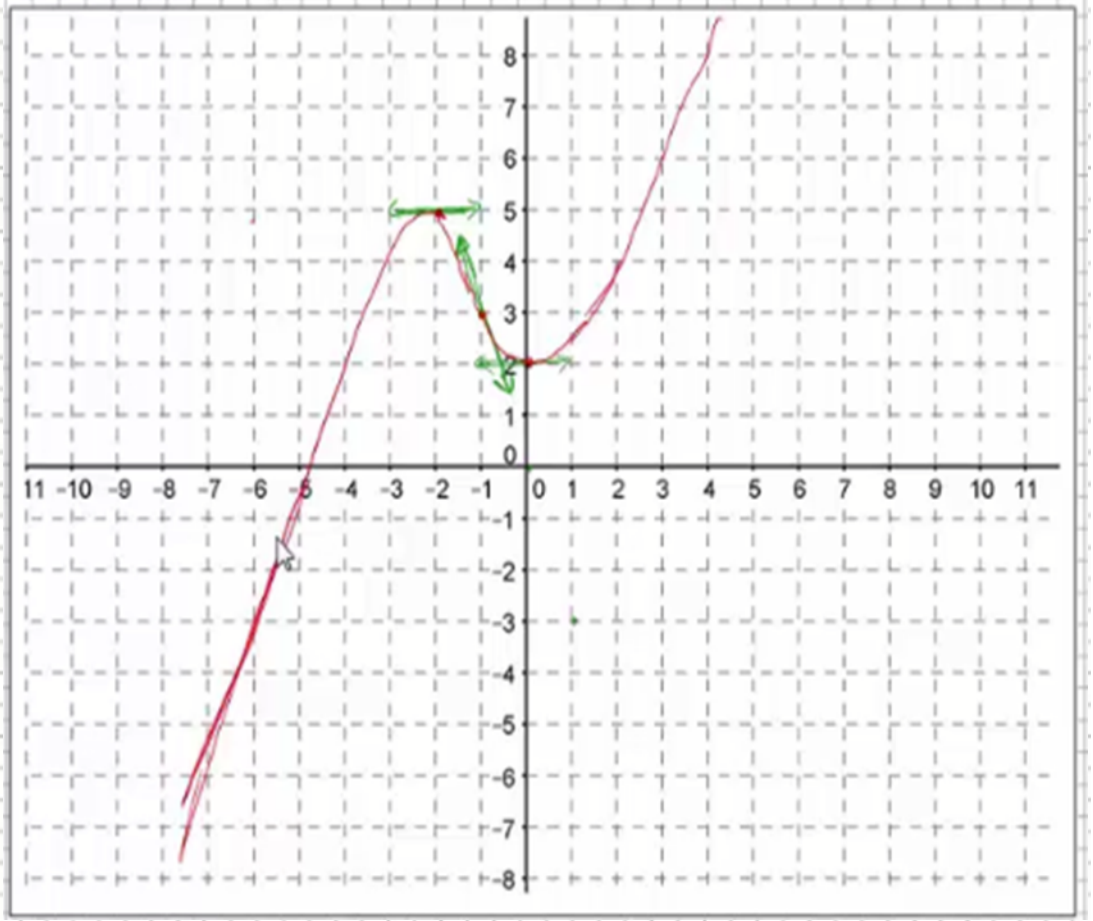
b) Etudier les variations de f
c) Tracer T et C

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$; f polynome, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et $f'(x) = 3x^2 + 3(2x^1) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$



c) Tracer a partir de la courbe (C) , la courbe (C') de g.
d) Déterminer le tableau de variation de g

II //

1°/ Soit la fonction g: IR → IR: $x \mapsto |x^3| + 3x^2 + 1$ et C' sa courbe dans le repère R.

a) Montrer que g est une fonction paire. Interpréter géométriquement le résultat.

1°/ a) $D_g = \mathbb{R}$;

- $\forall x \in \mathbb{R}$; $-x \in \mathbb{R}$
- $g(-x) = |(-x)^3| + 3(-x)^2 + 1 = |-x^3| + 3x^2 + 1$
  $= |x^3| + 3x^2 + 1$
  $= g(x)$

g est une fonction paire
Sa courbe C' est symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{i})$

b) Etudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter graphiquement les résultats obtenus

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x^3| + 3x^2 + 1 - 1}{x}$
  $= \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{1} = 0 = g'_d(0)$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^3 + 3x^2}{x} = \lim_{x \to 0^-} -x^2 + 3x = 0 = g'_g(0)$

Conclusion $g'_d(0) = g'_g(0) = 0$
g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$
C' admet au pt $I(0,1)$ une tangente horizontale.

c) Tracer a partir de la courbe (C) , la courbe (C') de g.

d) Déterminer le tableau de variation de g

c) g étant une fonction paire. C' est symétrique par rapport à $(O, \vec{j})$
il suffit donc de l'étudier sur $[0, +\infty[$
or si $x \geq 0$ $g(x) = |x^3| + 3x^2 + 1 = x^3 + 3x^2 + 1 = f(x)$
si $x \geq 0$ $g(x) = f(x)$.

2°/ Résoudre dans IR l'équation $|x^3| + 3x^2 + 1 = a$